Axiomatische Mengenlehre

Michael Meyling

2. August 2008

Die Quelle für dieses Dokument ist hier zu finden:

http://qedeq.org/0_03_11/doc/math/qedeq_set_theory_v1.xml

Bei Fragen, Anregungen oder Bitte um Aufnahme in die Liste der abhängigen Module schicken Sie bitte eine EMail an die Addresse mailto:mime@qedeq.org

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mathematik ist eine Wissenschaft mit einer Struktur, die im Laufe der Zeit riesige Dimensionen erreicht hat. Diese unglaublich hohe Burg besitzt nur ein ganz schmales Fundament und ihre Festigkeit gründet sich auf einfachen prädikatenlogischen Mörtel. Im Prinzip kann der Aufbau von jeder Mathematikerin verstanden werden. Von dem neuesten Gipfel mathematischer Erkenntnis kann jeder Pfad logisch folgerichtig bis in die mengentheoretischen Wurzeln nachvollzogen werden.

Bei diesem Unternehmen will dieses Dokument Hilfestellung geben. Ziel ist eine Präsentation der mengentheoretischen Wurzeln in verständlicher Weise. Bei aller Verständlichkeit soll es jedoch jederzeit möglich sein, tief in die Details einzusteigen. Ja sogar bis auf die Ebene eines formal korrekten Beweises hinab. Dazu gibt es dieses Dokument in verschiedenen Detailierungen. Für alle aber gilt, dass die Formeln in Axiomen, Definitionen und Propositionen in formal korrekter Form vorliegen.

Wir wollen bei den Wurzeln anfangen...

Dieses Dokument ist noch im Entstehen und wird von Zeit zu Zeit aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

Besondere Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit.

Hamburg, März 2008

Michael Meyling

Einleitung

In diesem Dokument nutzen wir die Ergebnisse aus http://qedeq.org/0_03_11/doc/math/qedeq_logic_v1_de.pdf. Nachdem durch die Logik die Art der mathematischen Argumentation vorgegeben wird, wird in der Mengenlehre ganz allgemein über Objekte und ihre Zusammenfassungen gesprochen. Besonders interessant ist die Mengenlehre dadurch, dass sie zum einen von eigentlich allen mathematischen Disziplinen verwendet wird. Zum anderen lässt sich jede mathematische Disziplin innerhalb der Mengenlehre definieren. Zahlentheorie, Algebra, Analysis und alle weiteren Gebiete lassen sich darauf aufbauen.

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen der Mengenlehre. Ziel ist dabei die Bereitstellung von elementaren Ergebnissen der Mengenlehre, die in anderen mathematischen Disziplinen benötigt werden. Nach den Grundlagen wird die Boolsche Algebra der Klassen betrachtet. Es schliessen sich Betrachtungen über Relationen und Funktionen an. Ein weiteres wichtiges Ergebnis sind die Definition der natürlichen Zahlen und die Erfüllung der Peano-Axiome durch diese, auch auf den Begriff der Rekursion wird eingegangen.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise soll aber im Ergebnis der mathematischen Praxis entsprechen. Daher wird auch das Axiomensystem der Mengenlehre von *A. P. Morse* und *J. L. Kelley* (MK) verwendet.

Kapitel 1

Anfangsgründe

In diesem Kapitel beginnen wir mit den ganz elementaren Axiomen und Definitionen der Mengenlehre. Wir versuchen nicht eine formale Sprache einzuführen[1] und setzen das Wissen um den Gebrauch von logischen Symbolen voraus. Noch genauer formuliert: wir arbeiten mit einer Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit.

G. Cantor, der als Begründer der Mengenlehre gilt, hat in einer Veröffentlichung im Jahre 1895 eine Beschreibung des Begriffs *Menge* gegeben.

> Unter einer „Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Diese Zusammenfassung kann über die Angabe einer Eigenschaft dieser Elemente erfolgen. Um 1900 wurden verschiedene Widersprüche dieser naiven Mengenlehre entdeckt. Diese Widersprüche lassen sich auf trickreich gewählte Eigenschaften zurückführen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Widersprüche zu verhindern. In diesem Text schränken wir zwar die Angabe von Eigenschaften in keiner Weise ein, aber wir nennen das Ergebnis der Zusammenfassung zunächst einmal *Klasse*. Zusätzliche Axiome regeln dann, wann eine bestimmte Klasse auch eine Menge ist. Alle Mengen sind Klassen, aber nicht alle Klassen sind Mengen. Eine Menge ist eine Klasse, die selbst Element einer anderen Klasse ist. Eine Klasse, die keine Menge ist, ist nicht Element irgend einer anderen Klasse.

1.1 Klassen und Mengen

Obgleich wir im Wesentlichen über *Mengen* sprechen wollen, haben wir am Anfang nur *Klassen*. Dieser Begriff wird nicht formal definiert. Anschaulich gesprochen, ist eine Klasse eine Zusammenfassung von Objekten. Die beteiligten Objekte heissen auch *Elemente* der Klasse. Mengen werden dann als eine besondere Art von Klassen charakterisiert.

Die folgenden Definitionen und Axiome folgen dem Aufbau einer vereinfachten Version der Mengenlehre nach *von Neumann-Bernays-Gödel* (*NBG*). Die genaue Bezeichnung lautet *MK* nach *Morse-Kelley*.

[1] Dessen ungeachtet sind die Formeln der Axiome, Definitionen und Propositionen in dem Ursprungstext dieses Dokuments in einer formalen Sprache notiert. Der Ursprungstext ist eine XML-Datei, deren Syntax mittels der XSD `http://www.qedeq.org/current/xml/qedeq.xsd` definiert wird.

Die hier vorgestellte Mengenlehre hat als Ausgangsobjekte *Klassen*. Weiterhin wird nur ein einziges Symbol für eine binäre Relation vorausgesetzt: der *Enthaltenseinoperator*.

Initiale Definition 1.1 (Elementbeziehung)**.**

$$x \in y$$

Wir sagen auch x *ist Element von* y, x *gehört zu* y, x *liegt in* y, x *ist in* y. Neben der Identität ist dies das einzige Prädikat welches wir zu Beginn haben. Alle anderen werden definiert.[2] Zu Anfang haben wir auch noch keine Funktionskonstanten.

Obgleich wir die Elementbeziehung einfach negieren können, möchten wir dafür eine Abkürzung definieren.

Definition 1.2 (Negation der Elementbeziehung)**.**

$$x \notin y \;:\leftrightarrow\; \neg x \in y$$

Unser erstes Axiom besagt, dass beliebige Klassen x und y genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.[3]

Axiom 1 (Extensionalität)**.**

$$\forall z\ (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y) \;\rightarrow\; x \;=\; y$$

Die Klassen x and y können verschieden definiert sein, beispielsweise:

x	$=$	Klasse aller nichtnegativen ganzen Zahlen,
y	$=$	Klasse aller ganzen Zahlen, die als Summe von vier Quadraten geschreiben werden können,

aber wenn sie dieselben Elemente besitzen, sind sie gleich.

Nun zu unserer ersten Proposition. In dem Extensionalitätsaxiom können wir die Implikation umkehren.

Proposition 1.3.

$$\forall z\ (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y) \;\leftrightarrow\; x \;=\; y$$

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung des zweiten identitätslogischen Axioms. Wir setzen $x = y$ voraus. Nun folgt $\phi(x) \leftrightarrow \phi(y)$ für jedes Prädikat ϕ. So bekommen wir $z \in x \leftrightarrow z \in y$ für beliebiges z. Also haben wir $\forall\ z\ z \in x \leftrightarrow\ \ z \in y$. Damit zeigten wir $x = y \ \rightarrow\ \forall\ z\ z \in x \leftrightarrow\ \ z \in y$. Zusammen mit dem Extensionalitätsaxiom 1 erhalten wir das gewünschte Ergebnis. □

Jetzt legen wir fest, was eine *Menge* ist.

Definition 1.4 (Menge)**.**

$$\mathfrak{M}(x) \;:\leftrightarrow\; \exists y\ x \in y$$

[2] Das Gleichheitsprädikat könnte auch innerhalb der Mengenlehre definiert werden, aber dann wird auch ein weiters Axiom benötigt und es ergeben sich technischen Schwierigkeiten bei der Herleitung der Gleichheitsaxiome.

[3] Falls wir das Gleichheitsprädikat nicht als logisches Symbol voraussetzen würden, dann würden wir es hiermit definieren.

Mengen sind also nichts anderes, als Klassen mit einer besonderen Eigenschaft. Eine Klasse ist genau dann eine Menge, wenn sie Element irgendeiner Klasse ist.

Eine triviale Folgerung aus dieser Definition ist die folgende Äquivalenz.

Proposition 1.5.

$$x \in y \;\leftrightarrow\; (\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; x \in y)$$

Beweis. '⇒': Sei $x \in y$. Es folgt $\exists\, u\; x \in u$ und daher $\mathfrak{M}(x)$ und logisch $\mathfrak{M}(x) \wedge x \in y$.

'⇐': Aus $\mathfrak{M}(x) \wedge x \in y$ schließen wir $x \in y$. □

Nun können wir das Extensionalitätsaxiom wie folgt schreiben.[4]

Proposition 1.6.

$$x \;=\; y \;\leftrightarrow\; \forall\, \mathfrak{M}(z)\;\; (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y)$$

Beweis. '⇒': Genauso wie im Beweis zu 1.3 erhalten wir die erste Implikation mit dem zweiten idenitätslogischen Axiom.

'⇐': Angenommen es gelte $\forall\, \mathfrak{M}(z)\; (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y)$. Sei u eine beliebige Klasse. Falls $u \in x$ dann gilt u ist eine Menge nach Definition 1.4, und daraus folgt mit der Annahme $u \in y$. Analog folgt $u \in y \;\rightarrow\; u \in x$. Da u beliebig, haben wir $\forall u\; (u \in x \;\leftrightarrow\; u \in y)$. Und mit dem Extensionalitätsaxiom 1 erhalten wir daraus $x = y$. □

Beweis.

$x = y$	$\leftrightarrow$	$\forall\, z\; (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y)$	dies ist Proposition 1.3
	$\leftrightarrow$	$\forall\, z\; (\mathfrak{M}(z) \wedge z \in x \;\leftrightarrow\; \mathfrak{M}(z) \wedge z \in y)$	Proposition 1.5
	$\leftrightarrow$	$\forall\, z\; (\mathfrak{M}(z) \rightarrow (z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y))$	Elementare Sätze (bh)
	$\leftrightarrow$	$\forall\, \mathfrak{M}(z)\; z \in x \;\leftrightarrow\; z \in y)$	Definition eingeschränker Allquantor

□

Unser nächstes Axiom der Mengenlehre ermöglicht uns in simpler Art und Weise neue Klassen zu bilden. Eine Klasse wird ganz einfach durch die Angabe einer prädikatenlogischen Formel charakterisiert.

Axiom 2 (Komprehension)**.**

$$\exists x\; \forall y\; (y \in x \;\leftrightarrow\; (\mathfrak{M}(y) \;\wedge\; \phi(y)))$$

Durch eine kleine Änderung dieses Axioms würden wir im Folgenden ein *NBG*-Axiomensystem der Mengenlehre erhalten, welches auf *John von Neumann*, *Isaak Bernays* und *Kurt Gödel* zurückgeht. Dazu definieren wir: eine Formel, in der alle gebundenen Subjektvariablen auf Mengen restringiert sind wird *prädikative Formel* genannt. Prädikative Formeln formalisieren also diejenigen Eigenschaften, die man als „Eigenschaften von Mengen“ bezeichnen kann.[5] Fordern wir nun also zusätzlich, dass ϕ prädikativ sein muss, dann erhalten wir ein NBG-System[6].

[4] Es wird ein eingeschränkter Allquantor benutzt, z läuft nur über Mengen.

[5] Noch etwas formaler: in einer prädikativen Formel laufen alle Quantorenvariablen nur über Mengen: $\forall\, \mathfrak{M}(x)\; \exists\, \mathfrak{M}(y) \ldots$

[6] Dazu werden noch einige andere Axiome — analog zu den folgenden — benötigt

Durch das Komprehensionsaxiom und die Extensionalität wird nun der Zusammenhang zwischen einer Aussage $\phi(y)$ und der durch sie definierten Klasse festgelegt. Dabei behauptet das Komprehensionsaxiom die Existenz mindestens einer Klasse, deren Elemente die Aussage $\mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)$ erfüllen. Das Extensionalitätsaxiom und die Gleichheitsaxiome sichern ab, dass es höchstens eine solche Klasse gibt: irgend zwei Klassen, welche dieselben Elemente besitzen, sind gleich im Sinne der Ersetzbarkeit in allen einschlägigen Aussagen. Mit anderen Worten: es gibt nur genau eine solche Klasse.

Proposition 1.7.

$$\exists! x\ \forall y\ (y \in x \ \leftrightarrow\ (\mathfrak{M}(y)\ \wedge\ \phi(y)))$$

Beweis. Zu zeigen ist:

$$\begin{array}{ll} \exists x & \forall y\ (y \in x \leftrightarrow\ \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \\ \wedge\ \forall u\ \forall v & (\forall y\ (y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))\ \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow\ \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))) \\ & \quad \rightarrow u = v) \end{array}$$

Seien u und v beliebig. Es gelte weiterhin:

$\forall y\ (y \in u \leftrightarrow\ \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Dann folgt mit Elementare Sätze (f): $\forall y\ ((y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Daraus erhalten wir mit Elementare Sätze (bg): $\forall y\ ((y \in u \leftrightarrow y \in v))$. Und mit Proposition 1.3 folgt nun $u = v$. Also haben wir gezeigt:

$\forall u\ \forall v\ (\forall y\ (y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))) \rightarrow u = v)$

Zusammen mit dem Komprehensionsaxiom 2 folgt nun die Behauptung. □

Ausgehend von 1.7 können wir die Sprachsyntax erweitern und eine neue abkürzende Schreibweise einführen.

Regel 1 (Klassenschreibweise). *Für jede Formel $\alpha(x)$ definieren wir den Termausdruck $\{x \mid \alpha(x)\}$ durch*

$$\exists y\ (y = \{x \mid \alpha(x)\}\ \wedge\ \forall x\ x \in y\ \ \leftrightarrow \mathfrak{M}(x)\ \ \wedge \alpha(x))$$

Die freien Variablen von $\{x \mid \alpha(x)\}$ sind die freien Variablen von $\alpha(x)$ vermindert um $\{x\}$. Die gebunden Variablen entsprechen den gebunden Variablen von $\alpha(x)$. Alle Ableitungsregln werden entsprechend erweitert.

Basierend auf: 1.7

Insbesondere müssen die Substitutionsregeln angepasst werden.[7] Es handelt sich hierbei um eine *konservative* Erweiterung unser formalen Sprache. Das bedeutet, dass wir keine neuen mathematischen Inhalte erhalten. Es ist nur bequem, eine neue elegante Schreibweise zu besitzen.[8].

Im Folgenden wird auf diese neue Schreibweise zurückgegriffen.

+++ TODO Vielleicht ist es besser die Termsyntax zu erweitern und das folgende Axiom hinzuzufügen? $x \in \{y|\phi(y)\}\ \ \leftrightarrow\ \ \phi(x)$

[7] Weil nun ein Term auch gebundene Subjektvariablen besitzen kann. Glücklicherweise haben wir das jedoch schon bei der Formulierung unserer Substitutionsregeln berücksichtigt, so dass wir nichts tun müssen.

[8] Unter einer konservativen Erweiterung verstehen wir das Folgende: Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache und $\mathfrak{L}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}' \supset \mathfrak{L}$ gilt auch $\text{Formel}_{\mathfrak{L}'} \supset \text{Formel}_{\mathfrak{L}}$. Falls nun für jede Formelmenge $\Gamma \subseteq \text{Formel}_{\mathfrak{L}}$ und jede Formel $\alpha \in \text{Formel}_{\mathfrak{L}}$ gilt: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}'} \alpha\ \Rightarrow\ \Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$, dann heißt $\mathfrak{L}'$ eine *konservative* Erweiterung von $\mathfrak{L}$.

Die neue Schreibweise kann auch in einfacher Weise in die alte Syntax transformiert werden. Die Gültigkeit der Ausgangsprädikate drückt sich für diese neue Termart wie folgt aus.

Proposition 1.8.

$$
\begin{array}{rcll}
y \in \{x \mid \phi(x)\} & \leftrightarrow & (\mathfrak{M}(y) \ \wedge \ \phi(y)) & \text{(a)} \\
y \ = \ \{x \mid \phi(x)\} & \leftrightarrow & \forall z \ (z \in y \ \leftrightarrow \ z \in \{x \mid \phi(x)\}) & \text{(b)} \\
\{x \mid \phi(x)\} \ = \ \{x \mid \psi(x)\} & \leftrightarrow & \forall z \ (z \in \{x \mid \phi(x)\} \ \leftrightarrow \ z \in \{x \mid \psi(x)\}) & \text{(c)} \\
\{x \mid \phi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} & \leftrightarrow & \forall u \ \forall v \ ((u \ = \ \{x \mid \phi(x)\} \ \wedge \ v \ = & \text{(d)} \\
 & & \{x \mid \psi(x)\}) \ \rightarrow \ u \in v) & \\
\{x \mid \phi(x)\} \in y & \leftrightarrow & \forall u \ (u \ = \ \{x \mid \phi(x)\} \ \rightarrow \ u \in y) & \text{(e)}
\end{array}
$$

+++ wenn diese Formel richtig gesetzt würde, sollte sie so aussehen:

$$
\begin{aligned}
y \in \{x \mid \phi(x)\} &\leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y) && \text{(a)} \\
y = \{x \mid \phi(x)\} &\leftrightarrow \forall z \ (z \in y \leftrightarrow z \in \{x \mid \phi(x)\}) && \text{(b)} \\
\{x \mid \phi(x)\} = \{x \mid \psi(x)\} &\leftrightarrow \forall z \ (z \in \{x \mid \phi(x)\} && \text{(c)} \\
&\qquad \leftrightarrow z \in \{x \mid \psi(x)\}) && \\
\{x \mid \phi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} &\leftrightarrow \forall u \ \forall v \ ((u = \{x \mid \phi(x)\} && \text{(d)} \\
&\qquad \wedge \ v = \{x \mid \psi(x)\}) \rightarrow u \in v) && \\
\{x \mid \phi(x)\} \in y &\leftrightarrow \forall u \ (u = \{x \mid \phi(x)\} \rightarrow u \in y) && \text{(e)}
\end{aligned}
$$

Beweis. Direkt aus Klassenschreibweise 1 bekommen wir a) mittels Quantorenelimination und einam Identitätsgestz. Mit Proposition 1.3 erhalten wir b) und c). Ebenfalls mit Identitätsgesetzen bekommen wir d) und e). □

Durch sukzessives Anwenden des obigen Satzes kann also die neue Syntax in die alte überführt werden.

Da durch die neue Schreibweise ein Term eindeutig festgelegt wird, muss natürlich auch das Folgende gelten.

Proposition 1.9.

$$\exists! x \ x \ = \ \{y \mid \phi(y)\}$$

Beweis.

$\exists! \ x \ \forall \ z \ (z \in x \ \leftrightarrow \ \mathfrak{M}(z) \wedge \phi(z))$	dies ist Proposition 1.7
$\exists! \ x \ \forall \ z \ (z \in x \ \leftrightarrow z \in \{y \mid \phi(y)\}$	Proposition 1.8 (a)
$\exists! \ x \ x = \{y \mid \phi(y)\}$	Proposition 1.3

□

Aus der Äquivalenz von Aussageformen kann auf die Gleichheit der daraus gebildeten Klassen geschlossen werden.

Proposition 1.10.

$$\forall x \ (\phi(x) \ \leftrightarrow \ \psi(x)) \ \rightarrow \ \{y \mid \phi(y)\} \ = \ \{y \mid \psi(y)\}$$

Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Jede Klasse lässt sich durch eine Aussage beschreiben, indem auf ihre Elemente Bezug genommen wird.

Proposition 1.11.

$$x \ = \ \{y \mid y \in x\}$$

1.2 Spezielle Klassen

In diesem Abschnitt definieren wir die ersten Klassen.

Die Russellsche Klasse kann nun einfach definiert werden.

Definition 1.12 (Russell-Klasse)**.**

$$\mathfrak{Ru} \ := \ \{x \mid x \notin x\}$$

Die Russellsche Klasse ist eine *echte* Klasse, d. h. sie ist keine Menge.

Proposition 1.13.

$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{Ru})$$

Beweis.

$y \in \{x \mid \phi(x)\}$	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)$	das ist Proposition 1.8 (a)
$y \in \{x \mid x \notin x\}$	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{M}(y) \wedge y \notin y$	Substitution für ϕ
$y \in \mathfrak{Ru}$	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{M}(y) \wedge y \notin y$	Russellsche Klasse 1.12
$\mathfrak{Ru} \in \mathfrak{Ru}$	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{M}(\mathfrak{Ru}) \wedge \mathfrak{Ru} \notin \mathfrak{Ru}$	Substitution für y
$\mathfrak{M}(\mathfrak{Ru}) \wedge \mathfrak{Ru} \in \mathfrak{Ru}$	$\leftrightarrow$	$\mathfrak{M}(\mathfrak{Ru}) \wedge \mathfrak{Ru} \notin \mathfrak{Ru}$	Proposition 1.5
	$\not\mathfrak{M}(\mathfrak{Ru})$		Elementare Sätze (bi)

□

Die *Allklasse* soll alles mögliche umfassen.

Definition 1.14 (Allklasse)**.**

$$\mathfrak{V} \ := \ \{x \mid x \ = \ x\}$$

Mitgliedschaft in der Allklasse ist daher gleichbedeutet mit der Eigenschaft eine Menge zu sein.

Proposition 1.15.

$$x \in \mathfrak{V} \ \leftrightarrow \ \mathfrak{M}(x)$$

Beweis. □

Die Allklasse umfasst alle Mengen.

Proposition 1.16.

$$\mathfrak{V} \ = \ \{x \mid \mathfrak{M}(x)\}$$

Entsprechend definieren wir die *leere Klasse*. Später werden wir feststellen, dass die leere Klasse eine Menge ist. Dazu benötigen wir jedoch weitere Mengenaxiome. Wir bezeichnen diese Klasse jedoch schon jetzt mit den Worten *leere Menge*.

Definition 1.17 (Leere Klasse)**.**

$$\emptyset \ := \ \{x \mid x \ \neq \ x\}$$

Keine Klasse ist Element der leeren Klasse.

Proposition 1.18.

$$\forall z \ z \notin \emptyset$$

Eine Klasse, welche keine Elemente besitzt, ist die leere Klasse.

Proposition 1.19.

$$\forall z \ z \notin x \ \leftrightarrow \ x \ = \ \emptyset$$

Kapitel 2

Boolesche Algebra der Klassen

Die elementaren Operationen von Klassen und ihre Eigenschaften werden nun beschrieben.

Eine Boolesche Algebra, oft auch Boolescher Verband genannt, ist eine spezielle algebraische Struktur, die die Eigenschaften der logischen Operatoren *und*, *oder*, *nicht* sowie die Eigenschaften der mengentheoretischen Verknüpfungen *Durchschnitt*, *Vereinigung* und *Komplement* abstrahiert.

Sie ist benannt nach *G. Boole*, der sie in der Mitte des 19. Jahrhunderts definierte, um algebraische Methoden in der Aussagenlogik anwenden zu können.

2.1 Boolesche Klassenoperatoren

Die Schreibweise bzw. Regel 1 ermöglicht die Definition von Klassenperatoren mithilfe der logischen Verknüpfungen.

Die Vereinigung zweier Klassen besteht aus den Elementen beider Klassen.

Definition 2.1 (Vereinigung)**.**

$$(x \cup y) \;:=\; \{z \mid (z \in x \;\vee\; z \in y)\}$$

Entsprechend wird der Durchschnitt zweier Klassen definiert, als Klasse die aus den Elementen besteht, die in beiden Klassen vorhanden sind.

Definition 2.2 (Durchschnitt)**.**

$$(x \cap y) \;:=\; \{z \mid (z \in x \;\wedge\; z \in y)\}$$

Auch das Komplement einer Klasse kann einfach definiert werden.

Definition 2.3 (Komplement)**.**

$$\overline{x} \;:=\; \{z \mid z \notin x\}$$

Ob eine Menge ein Element der Vereinigung zweier Klassen ist, kann natürlich auch direkt angegeben werden.

Proposition 2.4.

$$z \in (x \cup y) \;\leftrightarrow\; (z \in x \;\vee\; z \in y)$$

Entsprechendes gilt für den Durchschnitt zweier Klassen.

Proposition 2.5.

$$z \in (x \cap y) \;\leftrightarrow\; (z \in x \;\wedge\; z \in y)$$

Analoges gilt für das Komplement, dort muss jedoch die Mengeneigenschaft explizit abgeprüft werden.

Proposition 2.6.

$$z \in \overline{x} \;\leftrightarrow\; (\mathfrak{M}(z) \;\wedge\; z \notin x)$$

Die vorherigen Sätze zeigen die Übertragbarkeit der Eigenschaften der logischen Verknüpfungen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ auf die Klassenverknüpfungen $\cup$, $\cap$ und $^{-}$. Deshalb lassen sich die entsprechenden logischen Gesetzmässigkeiten direkt auf die Klassenverknüpfungen übertragen.

Proposition 2.7.

$$\begin{aligned}
(x \cup y) &= (y \cup x) && \text{(a)}\\
(x \cap y) &= (y \cap x) && \text{(b)}\\
((x \cup y) \cup z) &= (x \cup (y \cup z)) && \text{(c)}\\
((x \cap y) \cap z) &= (x \cap (y \cap z)) && \text{(d)}\\
x &= (x \cup x) && \text{(e)}\\
x &= (x \cap x) && \text{(f)}\\
\overline{\overline{x}} &= x && \text{(g)}\\
\overline{(x \cup y)} &= (\overline{x} \cap \overline{y}) && \text{(h)}\\
\overline{(x \cap y)} &= (\overline{x} \cup \overline{y}) && \text{(i)}\\
(x \cup (y \cap z)) &= ((x \cup y) \cap (x \cup z)) && \text{(j)}\\
(x \cap (y \cup z)) &= ((x \cap y) \cup (x \cap z)) && \text{(k)}\\
\overline{\emptyset} &= \mathfrak{V} && \text{(l)}\\
\overline{\mathfrak{V}} &= \emptyset && \text{(m)}\\
(x \cap \mathfrak{V}) &= x && \text{(n)}\\
(x \cap \emptyset) &= \emptyset && \text{(o)}\\
(x \cup \mathfrak{V}) &= \mathfrak{V} && \text{(p)}\\
(x \cup \emptyset) &= x && \text{(q)}\\
(x \cup \overline{x}) &= \mathfrak{V} && \text{(r)}\\
(x \cap \overline{x}) &= \emptyset && \text{(s)}
\end{aligned}$$

2.2 Boolsche Algebra

Die Klassen bilden mit den Operatoren $\cap$, $\cup$, $^{-}$ und den Konstanten $\emptyset$, $\mathfrak{V}$ eine Boolesche Algebra.

+++ Referenzen zu Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, Idempotenz, etc.

2.3 Ordnung

Für eine boolsche Algebra kann eine kanonische *Teilordnung* definiert werden. Daher können wir auch für die Klassenalgebra eine Teilordnung festlegen.

Wir definieren die *Teilklassenrelation* durch eine Schnittklassenbildung.

Definition 2.8 (Teilklasse)**.**

$$x \subseteq y :\leftrightarrow (x \cap y) = x$$

Sind x und y Mengen sagen wir auch: x ist *Teilmenge* von y.

Die übliche Definition der Teilklassenrelation erhalten wir nun als Satz.

Proposition 2.9.

$$x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$$

Diese Relation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, definiert also eine Teilordnung mit $\emptyset$ als kleinstem und $\mathfrak{V}$ als größtem Element.

Proposition 2.10.

$$x \subseteq x \tag{a}$$
$$(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \rightarrow x \subseteq z \tag{b}$$
$$(x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \leftrightarrow x = y \tag{c}$$
$$\emptyset \subseteq x \tag{d}$$
$$x \subseteq \mathfrak{V} \tag{e}$$
$$x \subseteq \emptyset \rightarrow x = \emptyset \tag{f}$$
$$\mathfrak{V} \subseteq x \rightarrow x = \mathfrak{V} \tag{g}$$

Eine Schnittklasse ist immer Teilmenge ihrer Ausgangsklassen.

Proposition 2.11.

$$(x \cap y) \subseteq x \tag{a}$$
$$(x \cap y) \subseteq y \tag{b}$$

Eine Vereinigungsklasse hat ihre Ausgangsklassen als Teilklassen.

Proposition 2.12.

$$x \subseteq (x \cup y) \tag{a}$$
$$y \subseteq (x \cup y) \tag{b}$$

Für zwei Teilklassen ist auch die Vereinigungsklasse Teilklasse. Und falls eine Klasse Teilklasse von zwei Klassen ist, dann ist sie auch Teilklasse der Schnittklasse. Beide Beziehungen sind auch umkehrbar.

Proposition 2.13.

$$(x \subseteq z \wedge y \subseteq z) \leftrightarrow (x \cup y) \subseteq z \tag{a}$$
$$(z \subseteq x \wedge z \subseteq y) \leftrightarrow z \subseteq (x \cap y) \tag{b}$$

Bei Schnitt oder Vereinigung bleibt eine Teilklassenbeziehung erhalten.

Proposition 2.14.

$$x \subseteq y \rightarrow (x \cup z) \subseteq (y \cup z) \tag{a}$$
$$x \subseteq y \rightarrow (x \cap z) \subseteq (y \cap z) \tag{b}$$

Bei der Bildung des Komplements kehrt sich die Teilklassenbeziehung um.

Proposition 2.15.

$$x \subseteq y \leftrightarrow \overline{y} \subseteq \overline{x}$$

Für das Komplement und die Teilklassenbeziehung gelten die folgenden Äquivalenzen.

Proposition 2.16.

$$x \subseteq y \leftrightarrow (x \cap \overline{y}) = \emptyset \tag{a}$$
$$x \subseteq y \leftrightarrow (\overline{x} \cup y) = \mathfrak{V} \tag{b}$$
$$x \subseteq \overline{y} \leftrightarrow (x \cap y) = \emptyset \tag{c}$$
$$(x \cap y) \subseteq z \leftrightarrow x \subseteq (\overline{y} \cup z) \tag{d}$$

2.4 Einerklassen und Klassenpaare

Eine Klasse kann auch durch explizite Auflistung ihrer Elemente definiert werden.

Insbesondere kann durch Angabe eines Elements die sogenannte *Einerklasse* festgelegt werden. Wiederum mit Regel 1 können wir die Sprachsyntax erweitern und eine neue abkürzende Schreibweise einführen.

Definition 2.17 (Einerklasse)**.**

$$\{x\} := \{y \mid (\mathfrak{M}(x) \rightarrow y = x)\}$$

Da der Ausdruck $\{x\}$ für jegliches x definiert ist, kann er auch für den Fall, dass x eine echte Klasse ist, gebildet werden. In diesem Fall erfüllen alle Mengen y die Bedingung $\mathfrak{M}(y) \land (\mathfrak{M}(x) \rightarrow y = x)$ und die Einerklasse ist mit der Allklasse identisch. Das führt zu einem technisch einfacheren Umgang mit der Einerklasse.[1]

Für Mengen enthält die Einerklasse wie gewünscht nur die Menge selbst.

Proposition 2.18.

$$\mathfrak{M}(x) \rightarrow \forall z\ (z \in \{x\} \leftrightarrow z = x)$$

Für echte Mengen ist die Einerklasse mit der Allklasse identisch.

Proposition 2.19.

$$\neg\mathfrak{M}(x) \rightarrow \{x\} = \mathfrak{V}$$

Einerklasse einer Menge zu sein ist äquivalent dazu Element seiner Einerklasse zu sein.

Proposition 2.20.

$$\mathfrak{M}(x) \leftrightarrow x \in \{x\}$$

[1] Andere Autoren wie z. B. auch K. Gödel, definieren $\{x\}$ durch $\{y \mid y = x\}$.

Nun kann einfach durch Vereinigung zweier Einerklassen das *Paar* zweier Klassen definiert werden.

Definition 2.21 (Paar)**.**

$$\{x, y\} \ := \ (\{x\} \cup \{y\})$$

Ein Klassenpaar kann auch direkt, d. h. ohne Zuhilfenahme der Einerklassen beschrieben werden.

Proposition 2.22.

$$\{x, y\} \ = \ \{z \mid ((\mathfrak{M}(x) \ \land \ \mathfrak{M}(y)) \ \rightarrow \ (z \ = \ x \ \lor \ z \ = \ y))\}$$

Für Klassenpaare die aus Mengen gebildet werden kann die Eigenschaft Element des Klassenpaares zu sein einfacher ausgedrückt werden.

Proposition 2.23.

$$(\mathfrak{M}(x) \ \land \ \mathfrak{M}(y)) \ \rightarrow \ \forall z \ (z \in \{x, y\} \ \leftrightarrow \ (z \ = \ x \ \lor \ z \ = \ y))$$

Falls bei der Klassenpaarbildung eine echte Klasse dabei ist, dann ist das resultierende Klassenpaar mit der Allklasse identisch.

Proposition 2.24.

$$(\neg\mathfrak{M}(x) \ \lor \ \neg\mathfrak{M}(y)) \ \rightarrow \ \{x, y\} \ = \ \mathfrak{V}$$

Wir notieren dass die Klassenpaarbildung kommutativ ist.

Proposition 2.25.

$$\{x, y\} \ = \ \{y, x\}$$

Die Einerklasse ist ein Spezialfall des Klassenpaares.

Proposition 2.26.

$$\{x\} \ = \ \{x, x\}$$

Menge zu sein ist equivalent dazu Element eines Klassenpaares zu sein.

Proposition 2.27.

$$\mathfrak{M}(x) \ \leftrightarrow \ x \in \{x, y\}$$

Für Mengen ist die Elementbeziehung equivalent zur Teilklassenbeziehung für die zugehörige Einerklasse.

Proposition 2.28.

$$\mathfrak{M}(x) \ \rightarrow \ (x \in y \ \leftrightarrow \ x \ \subseteq \ \{y\})$$

Die Gleichheit von aus Mengen gebildeten Klassenpaaren ist wie erwartet.

Proposition 2.29.

$$(\mathfrak{M}(x) \ \wedge \ \mathfrak{M}(y) \ \wedge \ \mathfrak{M}(u) \ \wedge \ \mathfrak{M}(v)) \ \rightarrow \ (\{x,y\} \ = \ \{u,v\} \ \rightarrow \ ((x \ = \ u \ \wedge \ y \ = \ v) \ \vee \ (x \ = \ v \ \wedge \ y \ = \ u)))$$

2.5 Unendliche boolsche Operatoren

Es können auch beliebige Schnittklassen und Vereinigungsklassen gebildet werden. Dazu muss nur festgelegt werden, über welche Klassen jeweils geschnitten bzw. vereinigt wird.

Für eine Klasse von Mengen wird ein *Produkt* so definiert, dass genau die Elemente, die in allen Mengen enthalten sind, in dem Produkt liegen.

Definition 2.30 (Mengenprodukt)**.**

$$\bigcap \ x \ := \ \{z \mid \forall y \ (y \in x \ \rightarrow \ z \in y)\}$$

Diese Funktion kann als Verallgemeinerung der Schnittklassenbildung angesehen werden. Siehe auch Proposition 2.41.

Wir sagen auch, dass die Klasse x eine *Mengenfamilie* festlegt. Jedes Element von x ist ein Mitglied der Familie.

Wie üblich können wir die Elementbeziehung zum Mengenprodukt wie folgt beschreiben.

Proposition 2.31.

$$z \in \bigcap \ x \ \leftrightarrow \ (\mathfrak{M}(z) \ \wedge \ \forall y \ (y \in x \ \rightarrow \ z \in y))$$

Für den Spezialfall $x = \emptyset$ erhalten wir.

Proposition 2.32.

$$\bigcap \ \emptyset \ = \ \mathfrak{V}$$

Falls wir das Mengenprodukt einer nichtleeren Klasse bilden können wir die Mengenbedingung weglassen.

Proposition 2.33.

$$x \ \neq \ \emptyset \ \rightarrow \ (z \in \bigcap \ x \ \leftrightarrow \ \forall y \ (y \in x \ \rightarrow \ z \in y))$$

Analog können wir die *Mengensumme* definieren. Genau die Elemente, die in irgend einer der Mengen vorkommen, sollen in der Summe liegen.

Definition 2.34 (Mengensumme)**.**

$$\bigcup \ x \ := \ \{z \mid \exists y \ (y \in x \ \wedge \ z \in y)\}$$

Die Zugehörigkeit zur Mengensumme kann wie folgt ausgedrückt werden.

Proposition 2.35.

$$z \in \bigcup \ x \ \leftrightarrow \ \exists y \ (y \in x \ \wedge \ z \in y)$$

Hier können wir die Mengenbedingung $\mathfrak{M}(z)$ weglassen.

Für die leere Klasse erhalten wir.

Proposition 2.36.

$$\bigcup \emptyset \;=\; \mathfrak{V}$$

Die Teilklassenrelation verhält sich zu Mengenprodukt und Mengensumme wie folgt.

Proposition 2.37.

$$x \;\subseteq\; y \;\rightarrow\; \bigcap \, y \;\subseteq\; \bigcap \, x \qquad \text{(a)}$$
$$x \;\subseteq\; y \;\rightarrow\; \bigcup \, x \;\subseteq\; \bigcup \, y \qquad \text{(b)}$$

Die Elementbeziehung induziert Teilklassenbeziehungen in der folgenden Weise.

Proposition 2.38.

$$x \in y \;\rightarrow\; x \;\subseteq\; \bigcup \, y \qquad \text{(a)}$$
$$x \in y \;\rightarrow\; \bigcap \, y \;\subseteq\; x \qquad \text{(b)}$$

Die Vereinigungs- und Schnittklassenbildung passt zu Mengensumme und Mengenprodukt wie nachfolgend beschrieben.

Proposition 2.39.

$$\bigcap \, (x \cup y) \;=\; (\bigcap \, x \cap \bigcap \, y) \qquad \text{(a)}$$
$$\bigcup \, (x \cup y) \;=\; (\bigcup \, x \cup \bigcup \, y) \qquad \text{(b)}$$
$$\bigcup \, (x \cap y) \;\subseteq\; (\bigcup \, x \cap \bigcup \, y) \qquad \text{(c)}$$

Für den Fall einer nichtleeren Mengenfamile haben wir dieses.

Proposition 2.40.

$$\forall x \; (x \;\neq\; \emptyset \;\rightarrow\; \bigcap \, x \;\subseteq\; \bigcup \, x)$$

Für Mengenpaare erhalten wir die erwarteten Ergebnisse.

Proposition 2.41.

$$(\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; \mathfrak{M}(y)) \;\rightarrow\; \bigcap \, \{x, y\} \;=\; (x \cap y) \qquad \text{(a)}$$
$$(\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; \mathfrak{M}(y)) \;\rightarrow\; \bigcup \, \{x, y\} \;=\; (x \cup y) \qquad \text{(b)}$$

Für Einermengen erhalten wir analoge Aussagen.

Proposition 2.42.

$$\mathfrak{M}(x) \;\rightarrow\; \bigcap \, \{x\} \;=\; x \qquad \text{(a)}$$
$$\mathfrak{M}(x) \;\rightarrow\; \bigcup \, \{x\} \;=\; x \qquad \text{(b)}$$

2.6 Potenzklassenbildung

Nun können wir einen wichtigen neuen Klassenoperator einführen.

Aus der Teilklassenrelation lässt sich ein weiterer Klassenoperator gewinnen, die *Potenzklassenbildung*.

Definition 2.43 (Potenzklasse)**.**

$$\mathfrak{P}(x) \ := \ \{z \mid z \ \subseteq \ x\}$$

Für diesen neuen Operator gelten die folgenden Aussagen.

Proposition 2.44.

$$z \in \mathfrak{P}(x) \ \leftrightarrow \ (\mathfrak{M}(x) \ \wedge \ z \ \subseteq \ x) \tag{a}$$
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{V}) \ = \ \mathfrak{V} \tag{b}$$
$$\mathfrak{P}(\emptyset) \ = \ \{\emptyset\} \tag{c}$$
$$\mathfrak{M}(x) \ \leftrightarrow \ x \in \mathfrak{P}(x) \tag{d}$$
$$x \ \subseteq \ y \ \rightarrow \ \mathfrak{P}(x) \ \subseteq \ \mathfrak{P}(y) \tag{e}$$
$$(\mathfrak{M}(x) \ \wedge \ \mathfrak{P}(x) \ \subseteq \ \mathfrak{P}(y)) \ \rightarrow \ x \ \subseteq \ y \tag{f}$$
$$\mathfrak{P}((x \cap y)) \ = \ (\mathfrak{P}(x) \cap \mathfrak{P}(y)) \tag{g}$$
$$(\mathfrak{P}(x) \cup \mathfrak{P}(y)) \ \subseteq \ \mathfrak{P}((x \cup y)) \tag{h}$$
$$x \ \subseteq \ \mathfrak{P}(\bigcup \ x) \tag{i}$$
$$\bigcup \ \mathfrak{P}(x) \ \subseteq \ x \tag{j}$$

Speziell für Potenzmengen gilt die folgende Aussage.

Proposition 2.45.

$$\mathfrak{M}(x) \ \rightarrow \ x \ = \ \bigcup \ \mathfrak{P}(x)$$

Später können wir die Mengenbedingung fallenlassen, da wir dann über weitere Axiome verfügen.

Kapitel 3

Mengen, Relationen und Funktionen

In diesem Kapitel wird noch einmal genauer auf die Mengeneigenschaft eingegangen und es werden neue Axiome angegeben um die Existens von Mengen abzusichern.

Um Relationen definieren zu können, wird der Begriff des *geordneten Klassenpaares* benötigt, der es ermöglicht das *cartesische Produkt* von Klassen zu definieren. Relationen sind Teilklassen von cartesischen Produkten und bilden eine mit bestimmten Operationen eine *universelle Algebra*.

Spezielle Relationen sind die *Äquivalenzrelationen*, die einen etwas weiter gefassten Gleichheitsbegriff ermöglichen. Funktionen sind ebenfalls spezielle Relationen, Das Fraenkelsche Ersetzungsaxiom garantiert das Mengen auf Mengen abgebildet werden.

3.1 Mengen

Zur Darstellung der Booleschen Klassenalgebra wurden noch keine mengentheoretischen Axiome benötigt Im Folgenden werden weitere Axiome vorgestellt, die Bedingungen dafür angeben, wann eine Klasse eine Menge ist.

Die leere Klasse soll auch eine Menge sein.

Axiom 3 (Axiom der leeren Menge)**.**

$$\mathfrak{M}(\emptyset)$$

Damit haben wir zum ersten Mal Kenntnis über die Existenz einer Menge.

Um die Mengeneigenschaft für Paare von Mengen zu erhalten, haben wir das folgende Axiom.

Axiom 4 (Axiom der Paarmenge)**.**

$$(\mathfrak{M}(x) \ \wedge \ \mathfrak{M}(y)) \ \rightarrow \ \mathfrak{M}(\{x, y\})$$

Auch die Mengensumme einer Menge soll wieder eine Menge sein.

Axiom 5 (Summenmengenaxiom)**.**

$$\mathfrak{M}(x) \ \rightarrow \ \mathfrak{M}(\bigcup \ x)$$

Die Potenzklasse einer Menge soll auch wieder eine Menge sein.

Axiom 6 (Axiom der Potenzmenge)**.**

$$\mathfrak{M}(x) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}(\mathfrak{P}(x))$$

Die Teilklasse einer Menge soll wieder eine Menge sein.

Axiom 7 (Teilmengenaxiom)**.**

$$(\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; y \;\subseteq\; x) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}(y)$$

Die obigen Mengenaxiome ermöglichen es uns Mengen zu konstruieren. Durch das Axiom 3 haben wir eine erste Menge $\emptyset$. Durch die Anwendung von Axiom 6 erhalten wir die Menge $\{\emptyset\}$. Die erneute Bildung der Potenzmenge erzeugt die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Durch wiederholtes Anwendung der Prozedur bekommen wir eine beliebige Anzahl von Mengen.[1]

Weiterhin stellen wir fest, dass wir mit unseren bisherigen Axiomen nur die Existenz von Mengen mit einer endlichen Elementanzahl nachweisen können. Diese englichen Mengen sind „sicher“ in dem Sinne, dass sie nicht zu den Widersprüchen führen, wie sie in der uneingeschränkten Mengenlehre Zermelos auftreten,

Mit Hilfe der neuen Axiome können weitere Folgerungen gezogen werden.

Proposition 3.1.

$$(\neg\mathfrak{M}(y) \;\wedge\; y \;\subseteq\; x) \;\rightarrow\; \neg\mathfrak{M}(x) \tag{a}$$
$$\neg\mathfrak{M}(\mathfrak{V}) \tag{b}$$
$$(\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; \mathfrak{M}(y)) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}((x \cup y)) \tag{c}$$
$$(\mathfrak{M}(x) \;\wedge\; \mathfrak{M}(y)) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}((x \cap y)) \tag{d}$$
$$\mathfrak{M}(x) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}(\{x\}) \tag{e}$$
$$\mathfrak{M}(x) \;\rightarrow\; \neg\mathfrak{M}(\overline{x}) \tag{f}$$
$$x \;=\; \bigcup \mathfrak{P}(x) \tag{g}$$
$$\mathfrak{M}(x) \;\leftrightarrow\; \mathfrak{M}(\bigcup x) \tag{h}$$
$$\bigcap \mathfrak{V} \;=\; \emptyset \tag{i}$$
$$\bigcup \mathfrak{V} \;=\; \mathfrak{V} \tag{j}$$
$$x \;\neq\; \emptyset \;\rightarrow\; \mathfrak{M}(\bigcap x) \tag{k}$$

3.2 Geordnetes Klassenpaar

Das Konzept eines geordneten Paars ist für die weitere Entwicklung unserer Theorie wichtig. Es ermöglicht uns die Objekte anzuordnen. Bisher hingen unsere Objektzusammenfassungen nicht von der Reihenfolge der Sammlung ab. Wir wollen nun aber auch nach der Zusammenfassung herausfinden könnnen, welches das *erste* Element und welches das *zweite* Element war.

Die Definition eines geordneten Paares $\langle x, y\rangle$ erfolgt nach *N. Wiener* (1914) bzw. *K. Kuratowski* (1921).

Definition 3.2 (Geordnetes Paar)**.**

$$\langle x, y\rangle \;:=\; \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

[1] Dass die Mengen alle paarweise voneinander verschieden sind, ist leicht zu zeigen.

Für geordnete Paare von Mengen spielt die Reihe der angegebenen Elemente eine Rolle. Geordnete Paare sollten nur dann identisch sein, wenn ihre ersten Elemente und ihre zweiten Elemente identisch sind.

Proposition 3.3.

$$(\mathfrak{M}(x) \wedge \mathfrak{M}(y) \wedge \mathfrak{M}(u) \wedge \mathfrak{M}(v)) \rightarrow (\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \rightarrow (x = u \wedge y = v))$$

Ein aus Mengen gebildetes geordnetes Paar ist auch eine Menge. Die Umkehrung gilt auch.

Proposition 3.4.

$$(\mathfrak{M}(x) \wedge \mathfrak{M}(y)) \leftrightarrow \mathfrak{M}(\langle x, y\rangle)$$

Falls eine der Klassen keine Menge ist, dann ist das geordnete Paar mit der Allklasse identisch.

Proposition 3.5.

$$(\neg\mathfrak{M}(x) \vee \neg\mathfrak{M}(y)) \rightarrow \langle x, y\rangle = \mathfrak{V}$$

Um über geordnete Paare sprechen zu können benötigen wir ein neues Prädikat „ist ein geordnetes Paar “.

Definition 3.6 (Eigenschaft geordnetes Paar)**.**

$$\mathrm{isOrderedPair}(x) :\leftrightarrow \exists u\, \exists v\; x = \langle u, v\rangle$$

Wir betonen noch einmal, dass auch $\mathfrak{V}$ ein geordnetes Paar ist. Aber da wir meistens über Elemente von Klassen sprechen, haben wir nur mit Mengen zu tun, die eventuell auch geordnete Paare sind.

3.3 Kartesisches Produkt

Für die geordenten Klassenpaare brauchen wir eine Metastruktur. Dafür fassen wir einfach geordete Paare in einer Klasse zusammen.

Das Kartesische Produkt[2], auch *Kreuzprodukt* genannt, ist die Klasse aller geordneter Paare, deren Elemente aus den Ausgangsklassen stammen.

Definition 3.7 (Kartesisches Produkt)**.**

$$(x \times y) := \{z \mid \exists u\, \exists v\, (u \in x \wedge v \in y \wedge z = \langle u, v\rangle)\}$$

3.4 Relationen

Es ist wichtig Relationen zwischen mathematischen Objekten ausdrücken zu können und sie auch als Objekte behandeln zu können. Es stellt sich heraus, dass wir keine neuen Objektarten benötigen. Unsere bisherigen Strukturen reichen aus.

Num können wir den Begriff der *Relation* auch innerhalb unserer Mengenlehre definieren.

[2]Kartesisch oder kartesianisch nach der lateinischen Namensform *Cartesius* des Philosophen und Mathematikers *R. Descartes*.

Definition 3.8 (Relation)**.**

$$\mathfrak{Rel}(x) \;:\leftrightarrow\; \forall y \; (y \in x \;\rightarrow\; \text{isOrderedPair}(y))$$

Ein paar Aussagen über Relationen.

Proposition 3.9.

$$\mathfrak{Rel}(\emptyset) \tag{a}$$
$$\mathfrak{Rel}((\mathfrak{V} \times \mathfrak{V})) \tag{b}$$
$$(\mathfrak{Rel}(x) \;\wedge\; \mathfrak{Rel}(y)) \;\rightarrow\; \mathfrak{Rel}((x \cap y)) \tag{c}$$
$$(\mathfrak{Rel}(x) \;\wedge\; \mathfrak{Rel}(y)) \;\rightarrow\; \mathfrak{Rel}((x \cup y)) \tag{d}$$

Wie geben nun eine allgemeine Definitin des Begriffs *Definitionsbereich* an.

Definition 3.10 (Definitionsbereich)**.**

$$\mathfrak{Dom}(x) \;:=\; \{y \mid \exists z \; \langle y, z \rangle \in x\}$$

Analog zu dem Definitionsbereich legen wir den *Wertebereich* einer Klasse fest.

Definition 3.11 (Wertebereich)**.**

$$\mathfrak{Rng}(x) \;:=\; \{y \mid \exists z \; \langle z, y \rangle \in x\}$$

3.5 Relationenalgebra

MISSING! OTHER: +++

3.6 Äquivalenzrelationen

MISSING! OTHER: +++

3.7 Abbildungen und Funktionen

MISSING! OTHER: +++

Eine Funktion ist einfach eine spezielle Art von Relation.

Definition 3.12 (Funktion)**.**

$$\mathfrak{Funct}(x) \;:\leftrightarrow\; \mathfrak{Rel}(x) \;\wedge\; \forall y \; (y \in \mathfrak{Dom}(x) \;\rightarrow\; \exists! z \; \langle y, z \rangle \in x)$$

Falls der Definitionsbereich einer Funktion eine Menge ist, dann sollte auch ihr Wertebereich eine Menge sein.

Axiom 8 (Fraenkelsches Ersetzungsaxiom)**.**

$$(\mathfrak{Funct}(f) \;\wedge\; \mathfrak{M}(\mathfrak{Dom}(f))) \;\rightarrow\; \mathfrak{M}(\mathfrak{Rng}(f))$$

Kapitel 4

Natürliche Zahlen

MISSING! OTHER: +++

4.1 Fundierung und Unendlichkeit

MISSING! OTHER: +++

Mengen x sollten sich nicht selbst als Element enthalten oder ein Element besitzen das wiederum x als Element hat. Um diese und andere Enthaltenseinszirkel auszuschließen stellen wir das filgende Axiom vor.

Axiom 9 (Fundierungsaxiom)**.**

$$x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \; (y \in x \; \wedge \; (y \cap x) = \emptyset)$$

Dieses Axiom heißt auch Regularitätsaxiom.

Eine naheliegende Klassenerweiterung ist die Bildung der Vereinigungsmenge mit der Einerklasse.

Definition 4.1 (Nachfolger)**.**

$$x' := (x \cup \{x\})$$

Weil $x \notin x$ fügt die Nachfolgerfunktion der orginalen Klasse genau ein Element hinzu.

Wir wollen eine Menge mit unendlich vielen Elementen haben. So fordern wir einfach ihre Existenz.

Axiom 10 (Unendlichkeits)**.**

$$\exists x \; (\mathfrak{M}(x) \; \wedge \; \emptyset \in x \; \wedge \; \forall y \; (y \in x \; \rightarrow \; y' \in x))$$

4.2 Definition und Grundeigenschaften

MISSING! OTHER: +++

4.3 Induktion

MISSING! OTHER: +++

4.4 Folgen und normale Funktionen

MISSING! OTHER: +++

4.5 Rekursion

MISSING! OTHER: +++

Kapitel 5

Auswahlaxiom

+++

5.1 Wohlordnungen

+++
Nun kommen wir zu dem bekannten Auswahlaxiom. Wir formulieres es für Relationen.

Axiom 11 (Auswahlaxiom)**.**

$$\mathfrak{Rel}(x) \;\rightarrow\; \exists y \; (\mathfrak{Funct}(y) \;\rightarrow\; (y \;\subseteq\; x \;\wedge\; \mathfrak{Dom}(x) \;=\; \mathfrak{Dom}(y)))$$

5.2 Anwendungen des Auswahlaxioms

MISSING! OTHER:

Kapitel 6

Kontinuum

Literaturverzeichnis

[1] qedeq_logic_v1 http://qedeq.org/0_03_11/doc/math/qedeq_logic_v1.xml

[2] *E. J. Lemmon*, Introduction to Axiomatic Set Theory, Routledge & Kegan Paul Ltd, London 1968

[3] *J. D. Monk*, Introduction to Set Theory, McGraw-Hill, New York 1996

[4] *J. Schmidt*, Mengenlehre I, BI, Mannheim 1966