Mathematisches Beispielmodul

Michael Meyling

14. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Anfangsgründe **5**
1.1 Klassen und Mengen 5

Kapitel 1

Anfangsgründe

In diesem Kapitel beginnen wir mit den ganz elementaren Axiomen und Definitionen der Mengenlehre. Wir versuchen nicht eine formale Sprache einzuführen und setzen das Wissen um den Gebrauch von logischen Symbolen voraus. Noch genauer formuliert: wir arbeiten mit einer Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit.

G. Cantor, der als Begründer der Mengenlehre gilt, hat in einer Veröffentlichung im Jahre 1895 eine Beschreibung des Begriffs *Menge* gegeben.

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Diese Zusammenfassung kann über die Angabe einer Eigenschaft dieser Elemente erfolgen. Um 1900 wurden verschiedene Widersprüche dieser naiven Mengenlehre entdeckt. Diese Widersprüche lassen sich auf trickreich gewählte Eigenschaften zurückführen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Widersprüche zu verhindern. In diesem Text schränken wir zwar die Angabe von Eigenschaften in keiner Weise ein, aber wir nennen das Ergebnis der Zusammenfassung zunächst einmal *Klasse*. Zusätzliche Axiome regeln dann, wann eine bestimmte Klasse auch eine Menge ist. Alle Mengen sind Klassen, aber nicht alle Klassen sind Mengen. Eine Menge ist eine Klasse, die selbst Element einer anderen Klasse ist. Eine Klasse, die keine Menge ist, ist nicht Element irgend einer anderen Klasse.

1.1 Klassen und Mengen

Obgleich wir im Wesentlichen über *Mengen* sprechen wollen, haben wir am Anfang nur *Klassen*. Dieser Begriff wird nicht formal definiert. Anschaulich gesprochen, ist eine Klasse eine Zusammenfassung von Objekten. Die beteiligten Objekte heissen auch Elemente der Klasse. Mengen werden dann als eine besondere Art von Klassen charakterisiert. Die folgenden Definitionen und Axiome folgen dem Aufbau einer vereinfachten Version der Mengenlehre nach *von Neumann-Bernays-Gödel*. Diese Version wird auch *MK* nach *Morse-Kelley* genannt.

Die hier vorgestellte Mengenlehre hat als Ausgangsobjekte *Klassen*. Weiterhin wird nur ein einziges Symbol für eine binäre Relation vorausgesetzt: der *Enthaltenseinoperator*.

Initiale Definition 1.1 (Initiale Definition der Elementbeziehung)**.**

$$x \in y$$

Wir sagen auch x *ist Element von* y, x *gehört zu* y, x *liegt in* y, x *ist in* y. Neben der Gleichheit ist dies das einzige Prädikat welches wir zu Beginn haben. Alle anderen werden definiert.[1] Zu Anfang haben wir auch noch keine Funktionskonstanten.

Unser erstes Axiom besagt, dass beliebige Klassen x und y genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.[2]

Axiom 1 (Extensionalitätsaxiom)**.**

$$\forall z \ (z \in x \ \leftrightarrow \ z \in y) \ \rightarrow \ x \ = \ y$$

Die Klassen x and y können verschieden definiert sein, beispielsweise:

x	$=$	Klasse aller nichtnegativen ganzen Zahlen,
y	$=$	Klasse aller ganzen Zahlen, die als Summe von vier Quadraten geschreiben werden können,

aber wenn sie dieselben Elemente besitzen, sind sie gleich.

Jetzt legen wir fest, was eine *Menge* ist.

Definition 1.2 (Mengendefinition)**.**

$$\mathfrak{M}(x) \ :\leftrightarrow \ \exists y \ x \in y$$

Mengen sind also nichts anderes, als Klassen mit einer besonderen Eigenschaft. Eine Klasse ist genau dann eine Menge, wenn sie Element irgendeiner Klasse ist.

Als erste Folgerung aus dem Extensionalitätsaxiom erhalten wir das Folgende.[3]

Proposition 1.3.

$$\forall \ \mathfrak{M}(z) \ \ (z \in x \ \leftrightarrow \ z \in y) \ \rightarrow \ x \ = \ y$$

Beweis. Angenommen es gelte $\forall \ \mathfrak{M}(z) \ (z \in x \ \leftrightarrow \ z \in y)$. Sei z eine beliebige Klasse. Falls $z \in x$ dann gilt z ist eine Menge nach Definition 1.2, und daraus folgt mit der Annahme $z \in y$. Analog folgt $z \in y \ \rightarrow \ z \in x$. Da z beliebig, haben wir $\forall z \ (z \in x \ \leftrightarrow \ z \in y)$. Und mit dem Extensionalitätsaxiom 1 erhalten wir daraus $x = y$. □

[1] Das Gleichheitsprädikat könnte auch innerhalb der Mengenlehre definiert werden, aber dann wird auch ein weiters Axiom benötigt und es ergeben sich technischen Schwierigkeiten bei der Herleitung der Gleichheitsaxiome.

[2] Falls wir das Gleichheitsprädikat nicht als logisches Symbol voraussetzen würden, dann würden wir es hiermit definieren.

[3] Es wird ein eingeschränkter Allquantor benutzt, z läuft nur über Mengen.