Axiomatische Mengenlehre

Michael Meyling

29. Dezember 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mathematik ist eine Wissenschaft mit einer Struktur, die im Laufe der Zeit riesige Dimensionen erreicht hat. Diese unglaublich hohe Burg besitzt nur ein ganz schmales Fundament und ihre Festigkeit liegt an einfachen prädikatenlogischen Mörtel. Im Prinzip kann der Aufbau von jeder Mathematikerin verstanden werden. Von dem neuesten Gipfel mathematischer Erkenntnis kann jeder Pfad logisch folgerichtig bis in die mengentheoretischen Wurzeln nachvollzogen werden.

Bei diesem Unternehmen will dieses Dokument Hilfestellung geben. Ziel ist eine Präsentation der mengentheoretischen Wurzeln in verständlicher Weise. Bei aller Verständlichkeit soll es jedoch jederzeit möglich sein, tief in die Details einzusteigen. Ja sogar bis auf die Ebene eines formal korrekten Beweises hinab. Dazu gibt es dieses Dokument in verschiedenen Detailierungen. Für alle aber gilt, dass die Formeln in Axiomen, Definitionen und Propositionen in formal korrekter Form vorliegen.

Wir wollen bei den Wurzeln anfangen. . .

Dieses Dokument ist noch im Entstehen und wird von Zeit zu Zeit aktualisiert. Insbesondere werden an den durch „+++“ gekennzeichneten Stellen noch Ergänzungen oder Änderungen vorgenommen.

Besondere Dank geht an meine Frau *Gesine Dräger* und unseren Sohn *Lennart* für ihre Unterstützung und ihr Verständnis für ihnen fehlende Zeit.

Hamburg, Dezember 2005

Michael Meyling

Einleitung

Am Anfang steht die Logik. Sie stellt das Rüstzeug zur Argumentation bereit. Sie hilft beim Gewinnen von neuen Aussagen aus bereits vorhandenen. Sie ist universell anwendbar, liefert aber selbst keine Grundaussagen über mathematische Objekte. Erst in der Mengenlehre wird durch die Axiome eine mathematische Struktur definiert. Besonders interessant ist die Mengenlehre dadurch, dass sie zum einen von eigentlich allen mathematischen Disziplinen verwendet wird. Zum anderen lässt sich jede mathematische Disziplin innerhalb der Mengenlehre definieren. Zahlentheorie, Algebra, Analysis und alle weiteren Gebiete lassen sich darauf aufbauen.

Dieses Dokument beschreibt die mathematischen Grundlagen der Mengenlehre. Ziel ist dabei die Bereitstellung von elementaren Ergebnissen der Mengenlehre, die in anderen mathematischen Disziplinen benötigt werden. Nach den Grundlagen wird die Boolsche Algebra der Klassen betrachtet. Es schliessen sich Betrachtungen über Relationen und Funktionen an. Ein weiteres wichtiges Ergebnis sind die Definition der natürlichen Zahlen und die Erfüllung der Peano-Axiome durch diese, auch auf den Begriff der Rekursion wird eingegangen.

Die Darstellung erfolgt in axiomatischer Weise soll aber im Ergebnis der mathematischen Praxis entsprechen. Daher wird auch das Axiomensystem der Mengenlehre von *A. P. Morse* und *J. L. Kelley* (MK) verwendet.

Kapitel 1

Anfangsgründe

In diesem Kapitel beginnen wir mit den ganz elementaren Axiomen und Definitionen der Mengenlehre. Wir versuchen nicht eine formale Sprache einzuführen und setzen das Wissen um den Gebrauch von logischen Symbolen voraus. Noch genauer formuliert: wir arbeiten mit einer Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit.

G. Cantor, der als Begründer der Mengenlehre gilt, hat in einer Veröffentlichung im Jahre 1895 eine Beschreibung des Begriffs *Menge* gegeben.

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Diese Zusammenfassung kann über die Angabe einer Eigenschaft dieser Elemente erfolgen. Um 1900 wurden verschiedene Widersprüche dieser naiven Mengenlehre entdeckt. Diese Widersprüche lassen sich auf trickreich gewählte Eigenschaften zurückführen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Widersprüche zu verhindern. In diesem Text schränken wir zwar die Angabe von Eigenschaften in keiner Weise ein, aber wir nennen das Ergebnis der Zusammenfassung zunächst einmal *Klasse*. Zusätzliche Axiome regeln dann, wann eine bestimmte Klasse auch eine Menge ist. Alle Mengen sind Klassen, aber nicht alle Klassen sind Mengen. Eine Menge ist eine Klasse, die selbst Element einer anderen Klasse ist. Eine Klasse, die keine Menge ist, ist nicht Element irgend einer anderen Klasse.

1.1 Klassen und Mengen

Obgleich wir im Wesentlichen über *Mengen* sprechen wollen, haben wir am Anfang nur *Klassen*. Dieser Begriff wird nicht formal definiert. Anschaulich gesprochen, ist eine Klasse eine Zusammenfassung von Objekten. Die beteiligten Objekte heissen auch Elemente der Klasse. Mengen werden dann als eine besondere Art von Klassen charakterisiert. Die folgenden Definitionen und Axiome folgen dem Aufbau einer vereinfachten Version der Mengenlehre nach *von Neumann-Bernays-Gödel* (*NBG*).. Diese Version wird auch *MK* nach *Morse-Kelley* genannt.

Die hier vorgestellte Mengenlehre hat als Ausgangsobjekte *Klassen*. Weiterhin wird nur ein einziges Symbol für eine binäre Relation vorausgesetzt: der *Enthaltenseinoperator*.

Initiale Definition 1.1 (Elementbeziehung)**.**

$$x \in y$$

Wir sagen auch x *ist Element von* y, x *gehört zu* y, x *liegt in* y, x *ist in* y. Neben der Gleichheit ist dies das einzige Prädikat welches wir zu Beginn haben. Alle anderen werden definiert.[1] Zu Anfang haben wir auch noch keine Funktionskonstanten.

Obgleich wir die Elementbeziehung einfach negieren können, möchten wir dafür eine Abkürzung definieren.

Definition 1.2 (Negation der Elementbeziehung)**.**

$$x \notin y \ :=\ \neg x \in y$$

Unser erstes Axiom besagt, dass beliebige Klassen x und y genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten.[2]

Axiom 1 (Extensionalität)**.**

$$\forall z\ (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y) \ \rightarrow\ x \ =\ y$$

Die Klassen x and y können verschieden definiert sein, beispielsweise:

x	$=$	Klasse aller nichtnegativen ganzen Zahlen,
y	$=$	Klasse aller ganzen Zahlen, die als Summe von vier Quadraten geschreiben werden können,

aber wenn sie dieselben Elemente besitzen, sind sie gleich.

Jetzt legen wir fest, was eine *Menge* ist.

Definition 1.3 (Menge)**.**

$$\mathfrak{M}(x) \ :=\ \exists y\ x \in y$$

Mengen sind also nichts anderes, als Klassen mit einer besonderen Eigenschaft. Eine Klasse ist genau dann eine Menge, wenn sie Element irgendeiner Klasse ist.

Als erste Folgerung aus dem Extensionalitätsaxiom erhalten wir das Folgende.[3]

Proposition 1.4.

$$\forall\ \mathfrak{M}(z)\ (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y) \ \rightarrow\ x \ =\ y$$

Beweis. Angenommen es gelte $\forall\ \mathfrak{M}(z)\ (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y)$. Sei z eine beliebige Klasse. Falls $z \in x$ dann gilt z ist eine Menge nach Definition 1.3, und daraus folgt mit der Annahme $z \in y$. Analog folgt $z \in y \ \rightarrow\ z \in x$. Da z beliebig, haben wir $\forall z\ (z \in x \ \leftrightarrow\ z \in y)$. Und mit dem Extensionalitätsaxiom 1 erhalten wir daraus $x = y$. □

Weiterhin können wir in dem Extensionalitätsaxiom die Implikation umkehren.

[1] Das Gleichheitsprädikat könnte auch innerhalb der Mengenlehre definiert werden, aber dann wird auch ein weiters Axiom benötigt und es ergeben sich technischen Schwierigkeiten bei der Herleitung der Gleichheitsaxiome.

[2] Falls wir das Gleichheitsprädikat nicht als logisches Symbol voraussetzen würden, dann würden wir es hiermit definieren.

[3] Es wird ein eingeschränkter Allquantor benutzt, z läuft nur über Mengen.

Proposition 1.5.

$x = y \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)$

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung des zweiten identitätslogischen Axioms. □

Unser zweites Axiom ermöglicht eine einfache Möglichkeit Klassen zu bilden. Eine Klasse wird ganz einfach durch die Angabe einer prädikatenlogischen Formel charakterisiert.

Axiom 2 (Komprehension)**.**

$\exists x\ \forall y\ (x \in y \leftrightarrow (\mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Durch eine Änderung dieses Axioms würden wir im Folgenden ein *NBG*-Axiomensystem der Mengenlehre erhalten, welches auf *John von Neumann*, *Isaak Bernays* und *Kurt Gödel* zurückgeht.

Dazu definieren wir: eine Formel, in der alle gebundenen Subjektvariablen auf Mengen restringiert sind wird *prädikative Formel* genannt. Prädikative Formeln formalisieren also diejenigen Eigenschaften, die man als „Eigenschaften von Mengen" bezeichnen kann.[4] Fordern wir nun also zusätzlich, dass ϕ prädikativ sein muss, dann erhalten wir im Folgenden ein NBG-System.

Durch das Komprehensionsaxiom und die Extensionalität wird nun der Zusammenhang zwischen einer Aussage $\phi(y)$ und der durch sie definierten Klasse festgelegt. Dabei behaupted das Komprehensionsaxiom die Existenz mindestens einer Klasse, deren Elemente die Aussage $\mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)$ erfüllen. Das Extensionalitätsaxiom und die Gleichheitsaxiome sichern ab, dass es höchstens eine solche Klasse gibt: irgend zwei Klassen, welche dieselben Elemente besitzen, sind gleich im Sinne der Ersetzbarkeit in allen einschlägigen Aussagen. Mit anderen Worten: es gibt nur genau eine solche Klasse.

Proposition 1.6.

$\exists! x\ \forall y\ (x \in y \leftrightarrow (\mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Beweis. Zu zeigen ist:

$$\begin{aligned} &\exists x \quad \forall y\ (y \in x \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \\ \wedge\ &\forall u\ \forall v \quad (\forall y\ (y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))\ \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))) \\ &\qquad\qquad \rightarrow u = v) \end{aligned}$$

Seien u und v beliebig. Es gelte weiterhin:

$\forall y\ (y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Dann folgt mit **??**: $\forall y\ ((y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)))$

Daraus erhalten wir mit **??**: $\forall y\ ((y \in u \leftrightarrow y \in v))$. Und mit Proposition 1.5 folgt nun $u = v$. Also haben wir gezeigt:

$\forall u\ \forall v\ (\forall y\ (y \in u \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y)) \wedge\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y))) \rightarrow u = v)$

Zusammen mit Axiom 2 folgt nun die Behauptung. □

Ausgehend von 1.6 können wir die Sprachsyntax erweitern und eine neue abkürzende Schreibweise einführen.

[4] Noch etwas formaler: in einer prädikativen Formel laufen alle Quantorenvariablen nur über Mengen: $\forall\ \mathfrak{M}(x)\ \exists\ \mathfrak{M}(y) \ldots$

Regel 1 (Klassenschreibweise)**.** *Für jede Formel $\alpha(x)$ definieren wir den Termausdruck $\{x \mid \alpha(x)\}$ durch*

$$\exists y \ (y = \{x \mid \alpha(x)\} \ \wedge \ \forall x \ x \in y \ \leftrightarrow \mathfrak{M}(x) \ \wedge \alpha(x))$$

Die freien Variablen von $\{x \mid \alpha(x)\}$ sind die freien Variablen von $\alpha(x)$ vermindert um $\{x\}$. Die gebunden Variablen entsprechen den gebunden Variablen von $\alpha(x)$. Alle Ableitungsregln werden entsprechend erweitert.

Insbesondere muss die Substitutionsregel angepasst werden. Es handelt sich hierbei um eine *konservative* Erweiterung.

Im Folgenden wird auf diese Schreibweise zurückgegriffen.

Die neue Schreibweise kann auch in einfacher Weise in die alte Syntax transformiert werden. Die Gültigkeit der Ausgangsprädikate drückt sich für diese neue Termart wie folgt aus.

Proposition 1.7.

$(y \in \{x \mid \phi(x)\} \ \leftrightarrow \ (\mathfrak{M}(y) \ \wedge \ \phi(y))) \ \wedge \ (y \ = \ \{x \mid \phi(x)\} \ \leftrightarrow \ \forall z \ (z \in y \ \leftrightarrow \ z \in \{x \mid \phi(x)\})) \ \wedge \ (\{x \mid \phi(x)\} \ = \ \{x \mid \psi(x)\} \ \leftrightarrow \ \forall z \ (z \in \{x \mid \phi(x)\} \ \leftrightarrow \ z \in \{x \mid \psi(x)\})) \ \wedge \ (\{x \mid \phi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} \ \leftrightarrow \ \forall u \ \forall v \ ((u \ = \ \{x \mid \phi(x)\} \ \wedge \ v \ = \ \{x \mid \psi(x)\}) \ \rightarrow \ u \in v)) \wedge (\{x \mid \phi(x)\} \in y \ \leftrightarrow \ \forall u \ (u \ = \ \{x \mid \phi(x)\} \ \rightarrow \ u \in v))$

+++ wenn diese Formel richtig gesetzt würde, sollte sie so aussehen:

$$\begin{aligned}
y \in \{x \mid \phi(x)\} &\leftrightarrow \mathfrak{M}(y) \wedge \phi(y) && \text{(a)} \\
y = \{x \mid \phi(x)\} &\leftrightarrow \forall z \ (z \in y \leftrightarrow z \in \{x \mid \phi(x)\}) && \text{(b)} \\
\{x \mid \phi(x)\} = \{x \mid \psi(x)\} &\leftrightarrow \forall z \ (z \in \{x \mid \phi(x)\} && \text{(c)} \\
&\qquad \leftrightarrow z \in \{x \mid \psi(x)\}) \\
\{x \mid \phi(x)\} \in \{x \mid \psi(x)\} &\leftrightarrow \forall u \ \forall v \ ((u = \{x \mid \phi(x)\} && \text{(d)} \\
&\qquad \wedge \ v = \{x \mid \psi(x)\}) \rightarrow u \in v) \\
\{x \mid \phi(x)\} \in y &\leftrightarrow \forall u \ (u = \{x \mid \phi(x)\} \rightarrow u \in y) && \text{(e)}
\end{aligned}$$

Beweis. +++ fehlt noch. □

Durch sukzessives Anwenden des obigen Satzes kann also die neue Syntax in die alte überführt werden.

Index